



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

ПРИЛОЖНА МЕХАНИКА НА ФЛУИДИТЕ

проф. д-р ИВАН. АНТОНОВ

<http://mfantonov.com>

ЛИТЕРАТУРА:



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

ИВАН. С. АНТОНОВ

**ПРИЛОЖНА МЕХАНИКА
НА ФЛУИДИТЕ**

*ВТОРО ПРЕРАБОТЕНО
И ДОПЪЛНЕНО ИЗДАНИЕ*

СОФИЯ
2016

18) МЕТОДИ, ОСНОВАНИ НА МОДЕЛИРАНЕ НА ЕДРОМАЩАБНИТЕ ВИХРИ**Методи, основани на моделиране на едромашабните вихри**

При съставянето на тези модели се изхожда от следното: Едромашабните турбулентни структури при прехода от един тип течение към друг се различават чувствително, докато дребномашабната турбулентна структура се променя незначително [17]. Основен момент при прилагане на този метод е определянето на полето на едромашабните турбулентни структури. Препоръчва се, като най-общ подход при приета непрекъснатост на параметрите на течението, използване на т.нар. "филтрираща функция" на Леонард [52]. За всеки един параметър на течението - a , се записва:

$$6.192. \quad a = \bar{a} + a'$$

където : $\bar{a}$ - едромашабна съставяща и a' - остатъчна част от разглежданото поле. Отфилтрираното поле съгласно цитирания автор се определя като

$$6.193. \quad \bar{a}(x, t) = \int_D G(x - x') a(x', t) dx'$$

В случая $G(x - x')$ е филтрираща функция. Интегрирането се извършва по цялото поле на течението D . При прието локално осредняване по пространството на скоростната компонента $\bar{u}$ може да се запише уравнението

$$6.194. \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (R_{ij}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \bar{u}_i,$$

като u се представя съгласно [42]

$$6.195. R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} + \overline{u'_j u'_i} + \overline{u'_i u'_j},$$

R_{ij} е остатъчно напрежение в уравненията на Навие-Стокс, което зависи от дребномащабните величини и е необходимо да се моделира.

Уравнения за движение в обичайна форма. Съгласно [20] уравн. 6.193 може да се запише във вида

$$6.196. \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}) + \nu \nabla^2 \bar{u}_i,$$

където е означено: $\bar{P} = \frac{\bar{p}}{\rho} + \frac{1}{2} (\bar{u}_i \bar{u}_i) + \frac{1}{3} R_{kk}$, $\tau_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{3} R_{kk} \delta_{ij}$.

Вторият член в лявата част на уравн.6.195, като се използва (6.193), може да се запише във вида:

$$6.197. \overline{u_j} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-x') \overline{u_j} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x'_j} - \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x'_i} \right) dx'$$

С помощта на преобразуването на Фурие горният израз приема вида

$$6.197a. \overline{u_j} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) = \hat{G} \left[\overline{u_j} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \right]$$

В случая със знака "^" се означава преобразуване на Фурие.

Съгласно [20] за филтриращата функция G се препоръчва експоненциалната зависимост на Гаус:

$$6.198. G(x-x') = \left[\left(\frac{\gamma}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\Delta_A} \right]^3 \exp \left[-\gamma \frac{(x-x')^2}{\Delta_A^3} \right]$$

В горното уравнение са означени: γ – константа, Δ_A – широчина на филтъра. Съгласно цитирания източник се препоръчват следните стойности - за $\gamma = 6$, за $\Delta_A = 2\Delta$, при Δ – размер на изчислителната клетка. Предлага се модел на турбулентност, при който се използва отфилтрираният тензор на деформационните скорости -

$$\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right)$$

$$6.199. \tau_{ij} = -2\nu_T \bar{S}_{ij}$$

Турбулентният вискозитет ν_T , свързан с остатъчното скоростно поле, може да се определи по някоя от следните зависимости :

$$\nu_T = (C_s \Delta_A)^2 \left(2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{по [69],}$$

където C_s е постоянна или

$$\nu_T = (C_v \Delta_A)^2 \left(\bar{\omega}_i \bar{\omega}_i \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{съгласно [20].}$$

В горните изрази C_v и C_s са постоянни за едромащабните вихрови структури.

В [20] се твърди, че при използването на която и да е от горните формули за ν_T , съществена разлика в крайните резултати не се наблюдава.

За полето на налягането след прилагане на оператора дивергенция на уравнението за движение на едромащабните вихри и при използване на уравнението за непрекъснатост, се получава [20]

$$6.200. \nabla^2 \bar{p} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[-\bar{u}_j \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu_T \bar{S}_{ij}) \right]$$

Съгласно [20] при големи Re - числа, пряката вискозна дисипация в полето на едромащабната турбулентност е значително по-малка от преноса в пространството на изчислителната клетка, което позволява да се пренебрегне.

Уравнение за движение във форма на "завихреност". При теченията с граничен слой (струен или пристенен) съществува взаимодействие между две зони – турбулентна и незавихрена (потенциална) зона. В този тънък слой се наблюдава "скок" на завихреността - от някаква крайна стойност до нула – в несмутената част от течението. За тези течения (в струен и пристенен граничен слой) се препоръчва [20] използване на уравнения за движение във форма на завихреност.

На урavn.6.193 се прилага операторът rot , което води до израза

$$6.201. \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u'_j \omega_i} - \overline{u'_i \omega_j} \right) + \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_j} = \nu \nabla^2 \bar{\omega}_i$$

при

$$6.202. \bar{W}_{ij} = \overline{u'_i \omega_i - u'_j \omega_j + \bar{u}_j \omega'_i - \bar{u}_i \omega'_j + u'_j \omega'_i - u'_i \omega'_j}$$

По отношение модела на величината W_{ij} , която зависи от дребномащабните параметри на течението и се налага да се моделира по подходящ начин, има следните задължителни изисквания [20]:

а) Тъй като W_{ij} е асиметричен тензор, то за да се запази асиметричността му, е необходимо да се изпълни условието

$$6.203. \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (W_{ij}) = 0$$

Като се има предвид, че уравненията за завихреността на течението не съдържат членове от типа на налягането, възможно е да се регулира дивергенцията от завихреността;

- б) Вихърът на скоростта приема стойност нула във вихровата зона – в потенциалната част на течението;
- в) Той трябва да има вид на “източник на енергия”, за да описва ефектите във вътрешното пространство на изчислителната клетка.

Ако се приеме моделът на турбулентност по 6.198, то след прилагане на оператора *rot* към него се получава

$$6.204. \quad W_{ij} = \varepsilon_{ij} k \frac{\partial}{\partial x_i} (2 \nu_T \bar{S}_{kl}),$$

като ν_T се определя по уравн.199.б.

За пресмятане на W_{ij} в [20] се препоръчва и един друг модел, който води до еквивалентни резултати:

$$6.205. \quad W_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu_T \bar{\omega}_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\nu_T \bar{\omega}_j).$$

Числени решения на задачи, моделирани по метода на едромащабните вихри са, описани подробно в [20].